

# Appunti di dinamica stellare

Luca Ciotti

Bertinoro, 8-12 maggio 2006\*

---

\* $\text{\TeX}$  by Giuseppe Giudice

1. PRINCIPI
  - 1.1 Introduzione
  - 1.2 Tempo di rilassamento
  - 1.3 Equazione di Liouville
  - 1.4 Collisionless Boltzmann Equation (Vlasov)
  - 1.5 Equazioni di Jeans
  - 1.6 Teorema del viriale
  
2. APPLICAZIONI
  - 2.1 Dalle osservazioni alla teoria
  - 2.2 Dalla teoria al modello
  
3. BIBLIOGRAFIA

# 1 Principi

## 1.1 Introduzione

Ci proponiamo di studiare il *problema degli  $N$ -corpi*: come si muovono  $n$  masse  $m_i$  date le loro posizioni  $\mathbf{x}_i(0)$  e le loro velocità  $\mathbf{v}_i(0)$  iniziali, sotto l'azione della reciproca gravità?

Abbiamo a disposizione le *equazioni di Newton*:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^3} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \quad [\mathbf{x}_i(0); \mathbf{v}_i(0)]_{i=1, \dots, N},$$

qui di seguito espresse in forma Hamiltoniana

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i},$$

dove

$$H = T + U = \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - \frac{G}{2} \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|},$$
$$\mathbf{q}_i = \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i.$$

Per i due sistemi (ovviamente equivalenti) di  $3N$  equazioni differenziali ordinarie non lineari del secondo ordine (Newton) o  $6N$  equazioni differenziali ordinarie non lineari del primo ordine (Hamilton), vale il *teorema di esistenza e unicità* il quale afferma che se le condizioni iniziali sono "buone", esiste un intervallo di tempo  $t_0 < t < t_0 + \delta$ , nel quale il moto del sistema esiste ed è unico.

Sfortunatamente un approccio totalmente deduttivo-formale non permette di andare molto lontano nelle applicazioni. Occorre allora attaccare il problema da più fronti, ossia sfruttando risultati della Meccanica Celeste (tipicamente  $N < 10$ ), della Meccanica Statistica ( $N \gg 10$ ), dell'Idrodinamica, dei Plasmi, supportati da simulazioni numeriche e dal confronto con le osservazioni.

Occorre tenere presente che, poiché le equazioni differenziali che descrivono il moto sono non-lineari, possono svilupparsi *singolarità mobili* ovvero "urti matematici": in altre parole  $\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\| \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow t_1$ . Dal teorema di unicità tali urti sono determinati univocamente dalle condizioni iniziali del sistema. Valgono a proposito due teoremi: T1) Nello spazio

delle fasi del sistema l'insieme delle condizioni iniziali che conducono a singolarità ha *misura nulla*; 2) Si può avere collasso globale solo se  $\bar{L}_{tot} = 0$  (Sundmann, Weierstrass 1912). Nella

successiva trattazione potremo dunque "dimenticarci" degli urti matematici.

Occorre però considerare che le stelle non sono punti materiali, ma che hanno un certo diametro; se vogliamo che il nostro sistema di equazioni differenziali sia applicabile dobbiamo capire quanto gli *urti geometrici*, dovuti all'estensione finita delle stelle, siano importanti in sistemi reali. Ragioniamo per *ordini di grandezza* assumendo

$$R_* = R_{\odot} = 7 \times 10^{10} \text{ cm} = 2.3 \times 10^{-8} \text{ pc}.$$

Consideriamo quindi  $N$  stelle di raggio  $R_*$  in un volume di dimensione caratteristica  $R$ : si ha urto geometrico quando la distanza tra due centri è minore di  $2R_*$ . Ciascuna stella ha a disposizione un volume cilindrico di base  $\sigma_* \equiv 4\pi R_*^2$  e lunghezza  $\lambda_g$ , in cui  $\lambda_g$  può essere interpretato come il cammino libero medio. Imponendo che il volume totale spazzato da tutte le stelle sia uguale al volume totale a disposizione si ha:

$$N\lambda_g\sigma_* = \frac{4\pi}{3}R^3,$$

ovvero:

$$\frac{\lambda_g}{R_*} = \left(\frac{R}{R_*}\right)^3 \frac{1}{3N}.$$

Se per una galassia si assume  $R = 10^4$  pc ed  $N = 10^{11}$  si ha  $\lambda_g/R_* = 10^{23}$ . Per un ammasso globulare, con  $R = 10$  pc ed  $N = 10^5$  si ha  $\lambda_g/R_* = 10^{20}$ . Quindi in situazioni usuali possiamo evitare di preoccuparci non solo delle collisioni matematiche ma anche di quelle geometriche tra stelle.

## 1.2 Tempo di rilassamento

Il fatto che la forza gravitazionale sia proporzionale ad  $1/r^2$  implica che in generale non possiamo trascurare le parti lontane di un sistema dominato dalla gravità. Vediamo adesso come da questa constatazione si possa definire una terza categoria di urti, oltre a quelli già visti.

Sia  $m_f$  la massa di una qualunque stella di campo,  $m_t$  quella della stella di prova,  $v_\infty$  la velocità iniziale della stella di prova, e  $b$  il parametro d'urto. Facciamo tre ipotesi, fisicamente sbagliate (per una trattazione quantitativa si veda ad es. Chandrasekhar 1942), ma che danno un risultato qualitativamente corretto:

H1)  $m_t$  ed  $m_f$  fanno parte di un sistema di  $N$  masse ( $m_t = m_f = m$ ), omogeneo, di raggio  $R$ .

H2) Si studiano incontri per i quali  $\|\delta\mathbf{v}\|/v_\infty \ll 1$ .

H3) La traiettoria di  $m_t$  è una retta, mentre  $m_f$  rimane immobile durante l'interazione. Vedremo più avanti che una stima di  $v_\infty$  in un sistema autogravitante è data da

$$\langle v_\infty \rangle^2 = \frac{GNm}{R}.$$

Come cambia la velocità relativa  $\mathbf{v}_t$  in un incontro? Si ha

$$\delta\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}_\parallel + \delta\mathbf{v}_\perp = \delta\mathbf{v}_\perp,$$

poiché  $\delta\mathbf{v}_\parallel = 0$  per H3. Quindi

$$\|\delta\mathbf{v}_\perp\| \equiv \|\mathbf{v}_\perp(\infty) - \mathbf{v}_\perp(-\infty)\| = \frac{1}{m} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_\perp dt \right\| = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{F}_\perp\| dt.$$

Ma

$$\|\mathbf{F}_\perp\| = \frac{Gm^2}{r^2} \cos\theta = \frac{Gm^2b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Gm^2}{b^2 + (v_\infty t)^2},$$

da cui

$$\|\delta\mathbf{v}_\perp\| = \frac{Gm}{b^2} \times \frac{2b}{v_\infty} = F_{max} \times \Delta t_{urto}.$$

In un attraversamento del sistema,  $m_t$  subisce un numero di incontri con parametro tra  $b$  e  $b + db$  pari a

$$dn = \frac{N}{\pi R^2} \times 2\pi b db.$$

Inoltre, per simmetria, in un attraversamento

$$(\delta\mathbf{v}_\perp)_{cross} = 0,$$

dove  $(\ )_{cross}$  significa “media su tutti gli urti in un attraversamento”.

Invece

$$(\|\delta\mathbf{v}_\perp - (\delta\mathbf{v}_\perp)_{cross}\|^2)_{cross} = (\|\delta\mathbf{v}_\perp\|^2)_{cross} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \|\delta\mathbf{v}_\perp\|^2 dn = 8N \frac{Gm}{Rv_\infty} \ln \Lambda = v_\infty^2 \frac{8 \ln \Lambda}{N},$$

dove

$$\Lambda = \frac{b_{max}}{b_{min}},$$

e  $\ln \Lambda$  si chiama *logaritmo di Coulomb*.

**Osservazione:**  $\ln \Lambda$  diverge sia per  $b_{max} \rightarrow \infty$  (divergenza infrarossa) che per  $b_{min} \rightarrow 0$  (catastrofe ultravioletta). La divergenza infrarossa ci ricorda ancora una volta che le parti lontane del sistema e gli urti deboli sono importanti; invece la divergenza ultravioletta non compare in una trattazione esatta del problema.

Occorre adesso una stima per  $b_{max}$  e  $b_{min}$ . Si usa  $b_{max} = R$ , mentre  $b_{min}$  si può ricavare in base ad H2 da

$$1 = \frac{\|\delta v_\perp\|}{v_\infty} = \frac{2Gm}{b_{min} v_\infty^2},$$

da cui

$$b_{min} = \frac{2Gm}{v_\infty^2}.$$

Definiamo *numero di attraversamenti per il rilassamento* come

$$\sum_{i=1}^{n_{relax}} \frac{(\|\delta\mathbf{v}_\perp\|^2)_{cross}}{v_\infty^2} = 1.$$

Il *tempo di rilassamento a due corpi* risulta allora dato da

$$t_{relax} = n_{relax} \times t_{cross}.$$

Dalle formule precedenti,

$$n_{relax} \simeq \frac{0.1N}{\ln \Lambda} \simeq \frac{0.1N}{\ln N}, \quad t_{relax} \simeq \frac{0.1N}{\ln N} t_{cross},$$

dove  $t_{cross}$  è il tempo necessario per un attraversamento del sistema. I sistemi per i quali  $t_{relax}$  è molto maggiore dell'età si dicono *non collisionali* (collisionless); gli altri *collisionali* (collisional).

Per una galassia risulta  $t_{relax} = 10^{6-7}$  Gyr: per un ammasso globulare  $t_{relax} = 1 - 10$  Gyr. Quindi, le galassie sono non collisionali, gli ammassi globulari sono collisionali. Ovviamente i due concetti sono relativi: ogni sistema gravitazionale, se guardato sufficientemente a lungo, è collisionale.

Ricordiamo infine che esistono alcuni teoremi generali che dicono cosa succede ad alcune proprietà globali dei sistemi N-body quando  $t \rightarrow \infty$ , ma non sono di grande utilità pratica.

### 1.3 Equazione di Liouville

Premettiamo alcuni fatti generali sulle equazioni differenziali ordinarie (ODE). **Definizione**

Sia  $\mathbf{w} : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$  un campo vettoriale;  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ ;  $\mathbf{x} \in \bar{A} \subseteq \mathfrak{R}^n$ . Si dice ODE il sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Si dice soluzione della precedente ODE una  $\bar{\psi} : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\psi}}(\mathbf{x}; t) = \mathbf{w}[\bar{\psi}(\mathbf{x}_0; t), t], \\ \bar{\psi}(\mathbf{x}_0; 0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

#### Definizione

Se  $\partial \mathbf{w} / \partial t = 0$  l'equazione precedente si dice *autonoma*.  $\mathfrak{R}^n$  si dice spazio delle fasi,  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$  spazio delle fasi ampliato.

**Teorema** [Esistenza, unicità, dipendenza continua dalle condizioni iniziali]

- 1) Se  $\mathbf{w} \in C^{(0)}$  esiste la soluzione;
- 2) Se  $\|\mathbf{w}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{w}(\mathbf{y}_0, t)\| \leq K_0 \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|$  allora la soluzione è unica per un dato  $\mathbf{x}_0$  e  $\bar{\psi}$  dipende in maniera continua dalle condizioni iniziali.

Il precedente teorema ci dice che se abbiamo a che fare con un' ODE sufficientemente "buona", le curve nello spazio delle fasi non si possono mai incontrare e quindi si può sempre risalire (almeno formalmente) alle condizioni iniziali cioè

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \bar{\psi}(\mathbf{x}_0; t), \\ \mathbf{x}_0 = \bar{\psi}^{-1}(\mathbf{x}; t). \end{cases}$$

#### Esempio 1)

Le equazioni di Newton per un sistema ad  $N$  corpi sono date da

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i & (3N \text{ equazioni}), \\ \dot{\mathbf{v}}_i = -\nabla_i U / m_i & (3N \text{ equazioni}). \end{cases}$$

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda \neq \mu} \frac{m_\lambda m_\mu}{\|\mathbf{x}_\lambda - \mathbf{x}_\mu\|}.$$

Se si definisce

$$\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N),$$

allora

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N, \mathbf{F}_1/m_1, \mathbf{F}_2/m_2, \dots, \mathbf{F}_N/m_N);$$

dunque il sistema è autonomo.

**Esempio 2)**

Le equazioni di Hamilton per un sistema autonomo ad  $n$  gradi di libertà sono date da

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \\ \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i}. \end{cases}$$

$$H = H(\{\mathbf{q}_i\}; \{\mathbf{p}_i\}).$$

Se si definisce

$$\mathbf{x} \equiv (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n),$$

allora

$$\mathbf{w} = \left( -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_1}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_2}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_n}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_1}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_n} \right);$$

dunque il sistema è autonomo.

Possiamo adesso introdurre il concetto di derivata *materiale* di una  $f(\mathbf{x}, t)$ . Consideriamo il campo  $\mathbf{w}$  e la soluzione  $\bar{\psi}(\mathbf{x}_0, t)$  associata alla ODE e da essa determinata. Se  $f$  è una qualunque proprietà del sistema, costruiamo la  $f_L(\mathbf{x}_0, t) \equiv f[\bar{\psi}(\mathbf{x}_0, t), t]$  e successivamente la

$$\left( \frac{df_L}{dt} \right)_{\mathbf{x}_0}.$$

Quest'ultima si chiama *derivata materiale in forma lagrangiana di  $f$  secondo  $\mathbf{w}$* .

Da un punto di vista fisico la derivata materiale ci dice come varia una proprietà  $f$  lungo una traiettoria passante da  $\mathbf{x}_0$ . Richiamandosi alla definizione, si ottiene:

$$\left( \frac{df_L}{dt} \right)_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \nabla f |_{\mathbf{x}=\bar{\psi}(\mathbf{x}_0, t)}, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \rangle.$$

Il secondo membro di questa espressione è la *derivata materiale in forma euleriana di  $f$* , e quindi

$$\left( \frac{df_L}{dt} \right)_{\mathbf{x}_0} = \frac{Df}{Dt} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\psi}(\mathbf{x}_0, t)},$$

da cui

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \nabla f, \mathbf{w} \rangle.$$

**Esempio 1)**

Per un punto materiale in un campo esterno  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (\mathbf{v}, -\nabla\phi), \\ \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \rangle - \langle \nabla\phi, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \rangle. \end{aligned}$$

**Esempio 2)**

Per un sistema Hamiltoniano con  $n$  gradi di libertà:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\},$$

dove il simbolo  $\{f, H\}$  è la *parentesi di Poisson* per la coppia  $(f, H)$ .

Facciamo ancora un passo. In genere le proprietà di un sistema sono associate ad un volume invece che ad un punto nello spazio delle fasi. Costruita allora la funzione

$$F(t) = \int_{A(t)} f(\mathbf{x}, t) d^n \mathbf{x}$$

dove  $A(t)$  si modifica secondo  $\bar{\psi}$  (ad esempio  $f$  potrebbe essere la densità del fluido o la sua energia o la sua quantità di moto), vogliamo sapere come si comporta la derivata  $dF/dt$ .

Per il teorema di esistenza ed unicità possiamo invertire  $\bar{\psi}$  e quindi, ad ogni tempo fissato

$$F(t) = \int_{A(t)} f d^n \mathbf{x} = \int_{A(0)} f_L J_0 d^n \mathbf{x}_0,$$

dove

$$J_0 = \det \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{x}_0} \right)$$

è il determinante della matrice jacobiana associata a  $\bar{\psi}$ . Si può dimostrare che

$$\frac{\partial J_0}{\partial t} = J_0 \langle \nabla, \mathbf{w} \rangle \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\psi}(\mathbf{x}_0, t)},$$

da cui discende la seguente catena di identità:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int_{A(0)} \left( \frac{df_L}{dt} J_0 + f_L J_0 \langle \nabla, \mathbf{w} \rangle \right) d^n \mathbf{x}_0 = \\ &= \int_{A(0)} \left( \frac{df_L}{dt} + f_L \langle \nabla, \mathbf{w} \rangle \right) J_0 d^n \mathbf{x}_0 = \\ &= \int_{A(t)} \left( \frac{Df}{Dt} + f \langle \nabla, \mathbf{w} \rangle \right) d^n \mathbf{x}. \end{aligned}$$

In particolare, risulta provato il fondamentale *teorema del trasporto di Reynolds*:

**Teorema** [Trasporto di Reynolds]

$$\frac{dF}{dt} = \int_{A(t)} \left( \frac{Df}{Dt} + f \langle \nabla, \mathbf{w} \rangle \right) d^n \mathbf{x}.$$

Con questo risultato si possono costruire le equazioni descrittive di base della Dinamica Stellare e della Fluidodinamica.

Vediamo adesso alcune conseguenze del teorema del trasporto.

1) Se sappiamo che  $F$  si deve conservare, allora

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad \forall A(t) \Leftrightarrow \frac{Df}{Dt} + f \langle \nabla, \mathbf{w} \rangle = 0.$$

Quindi, per ogni proprietà conservata  $f$ ,

$$\frac{Df}{Dt} + f \langle \nabla, \mathbf{w} \rangle = 0.$$

2) Se  $f$  è conservata e  $\mathbf{w}$  è solenoidale (i.e.  $\langle \nabla, \mathbf{w} \rangle = 0$ ), allora

$$\frac{Df}{Dt} = 0.$$

**Esempio 1)** Particella in un campo  $\phi$ :  $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, -\nabla\phi)$  da cui consegue che  $\mathbf{w}$  è solenoidale, poiché  $\mathbf{v}$  non dipende da  $\mathbf{x}$  e  $\phi$  non dipende da  $\mathbf{v}$ .

**Esempio 2)** Consideriamo un qualunque sistema Hamiltoniano. Poiché

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

ogni sistema Hamiltoniano è solenoidale.

**Esempio 3)** Se  $f = 1$ , allora  $F(t)$  è il volume  $A(t)$  dello spazio delle fasi. Quindi sistemi Hamiltoniani conservano il volume nello spazio delle fasi (teorema di Liouville). Come immediata conseguenza si ha che i sistemi Hamiltoniani non possono avere punti di equilibrio asintoticamente stabili.

Consideriamo adesso il caso che a noi interessa, quello di un sistema composto da  $N$  particelle. Lo spazio delle fasi associato a tale sistema ( $\mathfrak{R}^{6N}$ ) viene usualmente indicato con  $\Omega$ . Ad ogni istante il sistema è completamente rappresentato da un punto in  $\Omega$ . Tale punto viene detto in Meccanica Statistica *microstato*. Per il teorema di esistenza ed unicità le particelle sono distinguibili e cambiandone due di posizione il punto in  $\Omega$  cambia. Ma da un punto di vista macroscopico il sistema non è cambiato. Questo concetto si sviluppa introducendo il concetto di *macrostato* come insieme di caratteristiche macroscopiche che interessano. Ad ogni macrostato corrisponde in generale un numero enorme di microstati; si dice *ensemble* l'insieme di microstati che lasciano invariato un macrostato. Fissato un macrostato iniziale, i microstati determinano l'ensemble iniziale in  $\Omega$ . Ciascun punto evolve in  $\Omega$  trasportato dal flusso di fase determinato dall'Hamiltoniana.

Si introduce in maniera naturale il concetto di *funzione di distribuzione microscopica*

$$f^{6N}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N, t)$$

definita come

$$dN = N f^{6N} d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 \dots d^3\mathbf{x}_N d^3\mathbf{v}_1 d^3\mathbf{v}_2 \dots d^3\mathbf{v}_N.$$

Se  $F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N)$  descrive il macrostato oggetto di studio, il valore del macrostato al tempo  $t$  è dato da

$$F(t) = \int_{\Omega} F f^{6N} d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 \dots d^3\mathbf{x}_N d^3\mathbf{v}_1 d^3\mathbf{v}_2 \dots d^3\mathbf{v}_N.$$

**Osservazioni:**

1)  $f^{6N} \geq 0$  su  $\Omega$ .

2)  $f^{6N}$  si può interpretare come probabilità, essendo per definizione il suo integrale su  $\Omega$  pari a 1.

Il problema principale quindi è: come evolve  $f^{6N}$ ? Osserviamo che, preso un volume arbitrario in  $\Omega$ ,

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_V f^{6N} d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 \dots d^3\mathbf{x}_N d^3\mathbf{v}_1 d^3\mathbf{v}_2 \dots d^3\mathbf{v}_N.$$

Inoltre, se per  $t = 0$  dentro il volume ci sono  $\Delta N$  punti, tale numero è conservato per ogni  $t$  poiché per il teorema di unicità è impossibile per un punto attraversare le pareti del volume  $V(t)$ : quindi

$$\frac{d\Delta N}{dt} = 0.$$

Inoltre il flusso è Hamiltoniano e quindi solenoidale, per cui l'equazione che descrive l'evoluzione della funzione di distribuzione microscopica è

$$\frac{Df^{6N}}{Dt} = 0.$$

Tale fondamentale equazione prende il nome di *equazione di Liouville*.

**Osservazioni:**

- 1) L'equazione di Liouville è di primo ordine, alle derivate parziali, quasi-lineare in  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^{6N}$ .
- 2) Si può mostrare (metodo delle caratteristiche), che è tanto difficile da risolvere quanto le equazioni del moto del problema degli  $N$ -corpi.
- 3) Se  $P$  è una proprietà del sistema:  $P = P(f^{6N})$  allora  $\frac{DP}{Dt} = \frac{dP}{df^{6N}} \frac{Df^{6N}}{Dt} = 0$  da cui l'equazione di evoluzione per una qualunque  $P(f^{6N})$  è

$$\frac{DP}{Dt} = 0.$$

Come abbiamo visto, l'equazione di Liouville dipende da  $6N + 1$  variabili. Possiamo trovare una funzione più semplice che soddisfa un'equazione più semplice? Intanto ricordiamo che l'equazione di Liouville è esatta per ogni  $N$ , anche piccolo. Consideriamo adesso un sistema con  $N$  grande. Possiamo fare 2 ipotesi:

- H1) Esiste una funzione  $\rho(\mathbf{x}, t)$  che descrive "bene" la densità del sistema.
- H2) A tale  $\rho(\mathbf{x}, t)$  è associato un potenziale  $\phi(\mathbf{x}, t)$  tramite l'equazione di Poisson:

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho.$$

Ovviamente,  $\phi$  e  $\rho$  non sono il potenziale e la densità *vere* del sistema ma i loro valori in approssimazione continua. In particolare

$$\phi = -G \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{\rho(\xi, t) d^3\xi}{\|\mathbf{x} - \xi\|}.$$

Ogni particella si muove sotto l'azione del potenziale

$$\phi_{vero} = \phi + \phi_{urti,i},$$

con

$$\phi_{urti,i} = -G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} + G \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{\rho(\bar{\xi}, t) d^3\bar{\xi}}{\|\mathbf{x}_i - \bar{\xi}\|}.$$

Associato alla coppia  $(\rho, \phi)$  è l'importante concetto di *funzione di distribuzione  $f$  in  $\mathfrak{R}^6$*  (indicheremo  $\mathfrak{R}^6$  con  $\Gamma$ ):

$$\begin{cases} f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \\ dN = f d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v} \geq 0. \end{cases}$$

Nel limite non collisionale, cioè per  $t < t_{relax}$ , ogni particella "vede" solo  $\phi$  e quindi il moto del sistema sarà ben descritto dalla seguente:

## 1.4 Collisionless Boltzmann Equation (CBE)

$$\begin{cases} \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \rangle - \langle \nabla \phi_T, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \rangle = 0 & (CBE), \\ \phi_T = \phi + \phi_{ext}, \\ \Delta \phi = 4\pi G \int_{\mathbb{R}^3} f d^3 \mathbf{v}. \end{cases}$$

### Osservazioni

- 1) La CBE è stata costruita con un po' di "buon senso".
- 2) La CBE dipende da 6+1 variabili, indipendentemente da  $N$ .
- 3) A differenza dell'equazione di Liouville, ci dobbiamo aspettare che per  $t > t_{relax}$  la CBE non descriva bene il nostro sistema.
- 4)  $\phi_{ext} = \phi_{ext}(\mathbf{x}; t)$  è un potenziale che deriva da tutta la materia che non fa parte del nostro sistema.

In seguito ci occuperemo solo della CBE, ma prima discutiamo un paio di punti:

D1) Che cosa succede della CBE per  $t > t_{relax}$ ?

R1) Per  $t > t_{relax}$ ,  $\phi_{urti}$  diventa importante. Ma il moto della CBE é determinato da  $\phi$ . Questo significa che gli "urti" in  $\Gamma$  possono portare particelle dentro e fuori il volumetto (cosa impossibile nell'equazione di Liouville). Questo si traduce in un termine di sorgente nella CBE. Inoltre, poiché gli "urti" sono in maggioranza "deboli", si può pensare che siano legati alla  $f$  stessa:

$$\frac{Df}{Dt} = C[f], \quad (\text{Master Equation}).$$

Sotto certe ipotesi,  $C[f]$  si può scrivere in maniera esplicita ottenendo l'equazione di *Fokker-Planck*.

D2) La CBE è "ben fondata", cioè è deducibile da principi primi?

R2) A partire dall'equazione di Liouville

$$\frac{Df^{6N}}{Dt} = 0$$

(esatta!) si può costruire una sequenza di  $6N$  equazioni (gerarchia BBGKY), l'ultima delle quali è

$$\frac{Df}{Dt} = C[f^{(6N)}],$$

in cui il secondo membro contiene tutta la nostra ignoranza.

Si può mostrare che in assenza di correlazioni (urti)  $C[f^{(6N)}] \rightarrow 0$ : la CBE è dunque ben fondata.

Supponiamo dunque di conoscere la  $f$ . Quali informazioni possiamo ottenere? Eccone alcune:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} f d^3 \mathbf{v}, \\ \bar{v}_i(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} f v_i d^3 \mathbf{v}, \\ \overline{v_i v_j}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} f v_i v_j d^3 \mathbf{v}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{ij}^2 \equiv \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j,$$

in cui:  $\rho$  è la densità;  $\bar{v}_i$  la velocità media;  $\sigma_{ij}^2$  il tensore di *dispersione di velocità*. In particolare,

$$\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ji}^2,$$

e quindi il tensore è diagonalizzabile. I tre autovettori definiscono gli *assi principali* dell'ellissoide di dispersione di velocità in  $\mathbf{x}$ , e i tre autovalori le dispersioni principali di velocità.

## 1.5 Equazioni di Jeans

Sfortunatamente, la CBE, anche se notevolmente più semplice dell'equazione di Liouville, è troppo difficile da risolvere in generale. Ci piacerebbe infatti assegnare, al tempo  $t = 0$  una  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ , e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{Df}{Dt} = 0, & \text{(CBE)} \\ f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) & \text{(cond. iniz.).} \end{cases}$$

A quel punto di potrebbero calcolare le varie medie e ottenere le informazioni che desideriamo sul sistema. Un approccio per estrarre informazioni dalla CBE senza doverla risolvere è quello dei *momenti*. Seguendo questa via si ottengono le *equazioni di Jeans*, ossia le equazioni dei momenti della  $f$ . Ovviamente in questo approccio si perde informazione ma si guadagna in semplicità.

1) *Equazione di continuità*

Si ottiene dall'identità

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\text{CBE}) d^3 \mathbf{v} = 0.$$

I vari termini della precedente identità si sviluppano come:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} f d^3 \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \\ \int_{\mathbb{R}^3} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3 \mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} f d^3 \mathbf{v} = \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i}. \\ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} &= \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

Da cui

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0.$$

2) *Equazione dell'impulso*

Si ottiene dall'identità

$$\int_{\mathbb{R}^3} v_i (\text{CBE}) d^3 \mathbf{v} = 0.$$

Procedendo analogamente e quanto sopra si ha

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0.$$

Si può ovviamente procedere indefinitamente scrivendo una gerarchia infinita di equazioni. Nasce il problema della *chiusura*: mentre in un gas questa è data in modo naturale dall'equazione di stato, in un sistema descritto dalla CBE questa non è dettata da principi primi. Quindi si devono fare delle ipotesi, in qualche maniera arbitrarie, sulla forma di  $\overline{v_i v_j}$ .

## 1.6 CBE nel caso stazionario

Una seconda possibile semplificazione della CBE è data dallo studio delle sue soluzioni *stazionarie*, cioè soluzioni per le quali

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

In questo caso la CBE diventa

$$\begin{cases} \langle \mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \rangle - \langle \nabla \phi_T, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \rangle = 0, \\ \Delta \phi = 4\pi G \int_{\mathbb{R}^3} f d^3 \mathbf{v}. \end{cases} \quad (*)$$

Il problema è ancora difficile, siamo in  $\mathbb{R}^6$ . L'equazione (\*) è quasi lineare, le sue *caratteristiche* sono le orbite nel potenziale  $\phi_T$ , quindi la domanda è: cosa sappiamo delle orbite in un potenziale generico? Molto (ma non tutto!).

**Definizione:**

Si dice *integrale del moto* per un potenziale  $\phi$  una funzione regolare  $I : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$I[\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t), \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t)] = I(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0).$$

A cosa servono gli integrali del moto? A determinare le orbite. Infatti, supponiamo di conoscere cinque integrali del moto indipendenti. Ciascuno di essi definisce (almeno localmente) una ipersuperficie 5-dimensionale nello spazio delle fasi e l'intersezione delle 5 ipersuperfici determina una varietà monodimensionale, cioè l'orbita. Inoltre, per definizione

$$\frac{DI}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}} \rangle - \langle \nabla \phi_T, \frac{\partial I}{\partial \mathbf{v}} \rangle = 0.$$

Ma  $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$  per definizione, quindi *la  $f$  è un integrale del moto in sistemi stazionari*. E ancora, se  $(I_1, I_2, \dots, I_n)$  sono integrali del moto, per una qualunque  $f = f(I_1, I_2, \dots, I_n)$  si ha

$$\frac{Df}{Dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial I_i} \frac{DI_i}{Dt} = 0,$$

quindi  $f$  nel caso stazionario può dipendere da  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  solo tramite integrali del moto (teorema di Jeans). Ne consegue che se sappiamo trovare degli integrali del moto per  $\phi$ , possiamo conoscere le orbite e la  $f$  *senza* integrare le equazioni differenziali date da

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla \phi.$$

Le seguenti domande nascono spontanee:

D1) Quanti sono gli  $I_i$  *indipendenti* in un dato  $\phi$ ?

R1) *Localmente* ce ne sono cinque.

D2) Come sono fatti quelli che conosciamo?

R2) Sono legati a *simmetrie* del sistema, più o meno “evidenti”. Si possono dividere tra *isolanti* e *non-isolanti*. Se il sistema è *completamente integrabile* le *azioni* ( $J_i$ ) sono isolanti, le *fasi* ( $\varphi_i = \varphi_{i0} + \frac{\partial H}{\partial J_i} t$ ) no, a meno di commensurabilità delle frequenze ( $\omega_i$ ).

D3) Esistono metodi generali per trovare tutti quelli che ci sono?

R3) Sfortunatamente no, si studiano quindi delle soluzioni particolari, corrispondenti agli  $I_i$  che si è in grado di determinare.

**Esempio 1.**

Se  $\phi = \phi(\mathbf{x})$  allora  $E = \phi + v^2/2$  è integrale del moto.

**Esempio 2.**

Se  $\phi = \phi(r)$  allora  $E, \mathbf{L}$  sono integrali del moto.

**Esempio 3.**

Se  $\phi = \phi(R, z)$  allora  $E, L_z$  sono integrali del moto.

**Esempio 4.**

Se  $f = f(E)$  allora

$$\begin{aligned} f = f(E) \Rightarrow \quad \bar{v}_i &= \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} v_i f E d^3 \mathbf{v} = 0, \\ \sigma_{ij}^2 &= \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} v_i v_j f E d^3 \mathbf{v} = 0, \\ \sigma_{ii}^2 &= \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} v_i^2 f E d^3 \mathbf{v} = \sigma_{jj}^2. \end{aligned}$$

Ciò significa che un sistema in cui  $f = f(E)$  non può presentare moti sistematici (ordinati) e la sua dispersione di velocità è necessariamente isotropa.

**Esempio 5.**

Se  $f = f(E, L^2)$  e  $\phi = \phi(r)$  il sistema non ruota, in genere  $\sigma_r^2 \neq \sigma_t^2$ , poiché  $f = f(\phi + (v_r^2 + v_t^2)/2, r^2 v_t^2)$ .

**Esempio 6.**

Se  $f = f(E, L_z)$  e  $\phi = \phi(R, z)$ , il sistema può ruotare solo con  $\bar{v}_\varphi \neq 0$ , mentre  $\bar{v}_R = \bar{v}_z = 0$ . Inoltre in genere  $\sigma_R^2 = \sigma_z^2 \neq \sigma_\varphi^2$  poiché  $f = f(\phi + (v_R^2 + v_z^2 + v_\varphi^2)/2, r v_\varphi)$ .

Nella parte di applicazioni vedremo come utilizzare queste conoscenze.

## 1.7 Teorema del viriale

Il percorso che porta al teorema del viriale è il seguente: a partire dalla CBE, facendo medie su  $\mathbf{v}$  si giunge alle equazioni di Jeans; da queste, facendo medie su  $\mathbf{x}$  si giunge al teorema del viriale.

**Osservazioni**

1) Il teorema del viriale può essere provato in molti modi, e non è richiesto che il sistema sia non collisionale.

2) Il teorema del viriale è importante perché lega fra loro informazioni strutturali e dinamiche sul sistema studiato.

Iniziamo la nostra deduzione introducendo le seguenti grandezze:

i) *Tensore energia cinetica totale:*

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \overline{v_i v_j} d^3 \mathbf{x},$$

$$\text{Tr}(K_{ij}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho (\overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} + \overline{v_3^2}) d^3 \mathbf{x} = K.$$

ii) *Tensore energia cinetica di dispersione:*

$$\Pi_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho \sigma_{ij}^2 d^3 \mathbf{x},$$

$$\text{Tr}(\Pi_{ij}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) d^3 \mathbf{x} = \Pi.$$

iii) *Tensore energia cinetica ordinata:*

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3 \mathbf{x},$$

$$\text{Tr}(T_{ij}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho (\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2) d^3 \mathbf{x} = T,$$

da cui

$$K_{ij} = T_{ij} + \Pi_{ij}/2,$$

e, prendendone la traccia Tr,

$$K = T + \Pi/2.$$

iv) *Tensore momento d'inerzia polare:*

$$I_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_i x_j d^3 \mathbf{x},$$

$$\text{Tr}(I_{ij}) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) d^3 \mathbf{x} = I.$$

Sia adesso  $\phi_T = \phi + \phi_{ext}$ , con

$$\phi = -G \int \frac{\rho(\bar{\xi}) d^3 \bar{\xi}}{\|\mathbf{x} - \bar{\xi}\|}, \quad U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \phi d^3 \mathbf{x}.$$

v) *Tensore autoenergia:*

$$U_{ij} = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}.$$

Si possono provare i seguenti risultati:

1)  $U_{ij} = U_{ji}$ , 2)  $\text{Tr}(U_{ij}) = \frac{1}{2} \int \rho \phi d^3 \mathbf{x} = U$ .

Come si vede, molte grandezze usate nelle varie definizioni sono contenute nelle equazioni di Jeans, che qui riscriviamo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_j \bar{v}_k}{\partial x_k} = -\rho \frac{\partial \phi_T}{\partial x_j}. \quad (2)$$

Ricaviamo adesso il teorema del viriale.

**Step 1** Si moltiplica la (2) per  $x_i$  e si integra sulle posizioni:

$$\underbrace{\int x_i \frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial t} d^3 \mathbf{x}}_a = - \underbrace{\int x_i \frac{\partial \rho \bar{v}_j \bar{v}_k}{\partial x_k} d^3 \mathbf{x}}_b - \underbrace{\int \rho x_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}}_c - \underbrace{\int \rho x_i \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}}_c.$$

I vari termini si trasformano come segue:

a) =  $\frac{d}{dt} \int \rho x_i \bar{v}_j d^3 \mathbf{x}$ . b) = (integrando per parti)  $2K_{ij}$ . c) =  $U_{ij}$ . d) =  $W_{ij}$  (attenzione: in generale  $W_{ij} \neq W_{ji}$ .)

**Step 2**

$$\begin{aligned} \frac{dI_{ij}}{dt} &= \int \frac{\partial \rho}{\partial t} x_i x_j d^3 \mathbf{x} = \\ &= - \int \frac{\partial \rho \bar{v}_k}{\partial x_k} x_i x_j d^3 \mathbf{x} = \\ &= \int \rho (x_i \bar{v}_j + x_j \bar{v}_i) d^3 \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nel passaggio dal secondo al terzo membro si è usata l'equazione (1), e l'integrale nel terzo membro è stato eseguito per parti.

**Step 3** Si fa comparire  $dI_{ij}/dt$  simmettizzando lo step 1), cioè si considera  $(A_{ij} + A_{ji})/2$ . Molti termini sono già simmetrici quindi rimangono invariati. Si ottiene quindi il

TEOREMA VIRIALE TENSORIALE

$$\frac{\ddot{I}_{ij}}{2} = 2K_{ij} + U_{ij} + (W_{ij} + W_{ji})/2.$$

Prendendone la traccia si ha il TEOREMA VIRIALE SCALARE

$$\frac{\ddot{I}}{2} = 2K + U + W,$$

dove

$$W \equiv \int \rho \langle \mathbf{x}, \nabla \phi_{ext} \rangle d^3 \mathbf{x}.$$

**Osservazioni**

1)  $W$  non è l'energia potenziale di  $\rho$  nel campo esterno, che invece è:

$$U_{ext} = \int \rho \phi_{ext} d^3 \mathbf{x}.$$

2) Se  $\ddot{I} = 0$  allora

$$2K = -(U + W).$$

3) Se  $\ddot{I} \neq 0$ , ma il moto del sistema è limitato, allora il teorema del viriale vale in senso di *media temporale*, ovvero

$$2\bar{K} = -(\bar{U} + \bar{W}).$$

4)(Identità di Jacobi) se  $W = 0$  allora  $E = K + U$ , quindi

$$\ddot{I} = E + K = 2E - U.$$

Se  $E > 0$ , allora  $\ddot{I} > 0 \forall t$  quindi  $I$  tende all'infinito per  $t$  tendente all'infinito. Come conseguenza, se  $E > 0$  almeno una particella lascia il sistema per  $t$  tendente all'infinito.

Si definiscono due grandezze caratteristiche,  $v_{vir}$  ed  $r_{vir}$ , usando  $U$  e  $K$ :

$$K \equiv \frac{M}{2} v_{vir}^2,$$

$$U \equiv -\frac{GM}{r_{vir}}.$$

Per cui, se  $W = 0$ ,

$$r_{vir} v_{vir}^2 = GM.$$

Quindi, dato un sistema stellare, se sappiamo come trasformare gli osservabili in  $v_{vir}$  e  $r_{vir}$ , possiamo misurarne la massa.

Con questo concludiamo la parte dedicata ad una breve rassegna dei principi. Abbiamo trascurato argomenti di fondamentale interesse, come:

- Dinamica sistemi collisionali.
- Stati transienti di sistemi N-body (ovvero: come si arriva ad un equilibrio?)
- Stabilità

## 2 Applicazioni

La parte sviluppata precedentemente, a parte il suo interesse intrinseco, può essere applicata su due fronti importanti:

1) Tramite la costruzione di modelli più o meno complessi da confrontarsi con le osservazioni si possono ottenere preziose informazioni sulla struttura, dinamica, formazione ed evoluzione dei sistemi stellari.

2) Chiarificazione di fenomeni fisici fondamentali dei sistemi gravitanti (stabilità, frizione dinamica, catastrofe gravotermica, ecc.).

Le applicazioni non vanno solo nel senso di usare la teoria per misurare grandezze, ma anche nel senso di usare le osservazioni per fornire indirizzi che possibilmente ci rivelino qualcosa di basilare a livello di teoria. Come è facilmente immaginabile le possibili applicazioni di quanto abbiamo sviluppato sono innumerevoli. Per ovvi motivi di spazio vedremo un particolare tipo di applicazione: la costruzione di un modello di galassia.

### 2.1 Dalle osservazioni alla teoria

Si parte da un profilo di brillantezza  $I$ , che riproduca bene il profilo osservato. Deproiettando tale profilo si ottiene la  $\rho_*$ . In certi casi si parte anche da  $\rho_*$  e si proietta, confrontando

il profilo ottenuto con quello osservato. In genere si assume costante il rapporto massa stellare–luminosità  $M_*/L$ .

**Esempio 1** In un sistema a simmetria sferica

$$\frac{M_*}{L}I(R) = 2 \int_R^\infty \frac{\rho_*(r)rdr}{\sqrt{r^2 - R^2}},$$

$$\rho_*(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{M_*}{L} \int \frac{dI}{dR} \frac{dR}{\sqrt{r^2 - R^2}}.$$

Nelle precedenti formule  $r$  è la distanza dal centro del sistema ed  $R$  è la distanza dal centro sul piano di proiezione.

**Definizioni:**

- Si chiama *raggio effettivo*  $R_e$  il raggio per cui

$$L_P(R_e) = 2\pi \int_0^{R_e} R^2 I(R) dR = \frac{L}{2}.$$

- Si chiama *raggio di “core”*  $R_c$  il raggio (se esiste) per cui

$$I(R_c) = \frac{I_0}{2}.$$

- Si chiama *raggio di metà massa*  $r_h$  il raggio (se esiste) per cui

$$M(r_h) = 4\pi \int_0^{r_h} r^2 \rho(r) dr = \frac{M}{2}.$$

Si noti che  $R_c$  ed  $R_e$  sono raggi proiettati,  $r_h$  è un raggio ‘spaziale’.  
Ecco qualche classico  $I(R)$ :

- De Vaucouleurs (1948)

$$I(R) = I_0 \exp \left[ -7.67 \left( \frac{R}{R_e} \right)^{1/4} \right].$$

- Sersic (1968)

$$I(R) = I_0 \exp \left[ -b(m) \left( \frac{R}{R_e} \right)^{1/m} \right],$$

$$b(m) \sim 2m - 1/3.$$

- Hubble (1913)

$$I(R) = \frac{I_0}{(1 + R/R_H)^2}.$$

- Hubble modificata

$$I(R) = \frac{I_0}{1 + (R/R_c)^2}.$$

- King<sub>1</sub> (1966)

$$I(R) = C \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_c^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_t^2}} \right].$$

Ecco invece qualche classica  $\rho(r)$ :

- Plummer (1911)

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi r_p^3} \frac{1}{(1 + r^2/r_p^2)^{5/2}}.$$

- King<sub>3</sub> (1972)

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(1 + r^2/r_c^2)^{3/2}}.$$

- $\gamma$ -models

$$\rho(r) = \frac{(3 - \gamma)M}{4\pi} \frac{r_c}{r^\gamma (r + r_c)^{4-\gamma}}.$$

- $\beta$ -models

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(1 + r^2/r_c^2)^{\beta/2}}$$

- Henon (1959) (Isocrona)

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r_H} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + r^2/r_H^2}}.$$

Ovviamente sono disponibili anche modelli  $\rho(R, z)$  o triassiali. Ad esempio, una generalizzazione triassiale dei modelli sferici può essere ottenuta sostituendo  $r$  con  $m$ , essendo

$$m^2 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

A questo punto si usano le equazioni di Jeans stazionarie, eventualmente considerando anche la presenza di un alone di materia oscura, caratterizzato da  $\rho_h$  e  $\phi_h$ , per determinare la dinamica di tali sistemi.

**Esempio 1** Caso sferico,  $f = f(E, L^2)$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_* \sigma_r^2}{\partial r} + 2 \frac{\beta(r) \rho_* \sigma_r^2}{r} = -\rho_* \frac{\partial \phi_T}{\partial r}, \\ \beta(r) \equiv 1 - \frac{\sigma_t^2}{\sigma_r^2}. \end{cases}$$

**Esempio 2** Caso assisimmetrico,  $f = f(E, L_z)$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_* \sigma_R^2}{\partial z} = -\rho_* \frac{\partial \phi_T}{\partial z}, \\ \frac{\partial \rho_* \sigma_R^2}{\partial R} - \rho_* \left( \frac{v_\phi^2 - \sigma_R^2}{R} \right) = -\rho_* \frac{\partial \phi_T}{\partial R}, \\ \overline{v_\phi^2} \equiv \sigma_\phi^2 + \overline{v_\phi^2}. \end{cases}$$

Si risolvono le equazioni (quasi sempre numericamente, qualche volta analiticamente) e si proiettano le dispersioni di velocità e le velocità di streaming.

**Esempio 1** Proiezione della dispersione di velocità nel caso sferico.

$$\left( \frac{M_*}{L} \right) I(R) \sigma_P^2(R) = 2 \int_R^\infty \left[ 1 - \beta(r) \frac{R^2}{r^2} \right] \frac{\rho \sigma_r^2 r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}.$$

Si cercano quindi i parametri del modello che meglio riproducono le osservazioni. Questo approccio, concettualmente semplice, presenta però i seguenti problemi, non secondari:

1) Chiusura delle equazioni di Jeans in qualche maniera arbitraria [e.g., l'andamento di  $\beta(r)$  e la scomposizione di  $\overline{v_\phi^2}$ ].

2) Non c'è una grossa base fisica per i vari modelli, non ci insegnano molto sul perché le galassie sono fatte proprio come si osservano.

3) Troppi parametri: anche modelli diversi possono adattarsi ugualmente bene ai dati (oppure lo stesso modello con parametri diversi: e.g., degenerazione DM-anisotropia orbitale)

4) Le equazioni di Jeans sono *momenti* della  $f$ . Certamente, se  $\sigma^2 < 0$  il modello è da scartare; ma anche se tutto sembra soddisfacente, non è assicurato che  $f > 0$  come è invece necessario.

**Esempio 1** Sferico isotropo.

$$\begin{aligned} f(E) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}} \frac{\partial}{\partial E} \int_0^\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\epsilon - \psi}}, \\ \epsilon &= -E, \\ \psi &= -\Phi. \end{aligned}$$

Se  $f < 0$  il modello è da scartare.

**Esempio 2** Simmetria assiale,  $f = f(\epsilon, L_z)$ .

$$\begin{aligned} f(\epsilon, L_z) &= f^+(\epsilon, L_z) + f^-(\epsilon, L_z). \\ \begin{cases} 2f^+ = f(\epsilon, L_z) + f(\epsilon, -L_z) \\ 2f^- = f(\epsilon, L_z) - f(\epsilon, -L_z). \end{cases} \\ \rho &= \frac{4\pi}{R} \int_0^\psi d\epsilon \int_0^{R\sqrt{2(\psi-\epsilon)}} f^+ dL_z, \\ \rho \overline{v_\phi} R &= \frac{4\pi}{R} \int_0^\psi d\epsilon \int_0^{R\sqrt{2(\psi-\epsilon)}} f^- L_z dL_z. \end{aligned}$$

Se  $f < 0$  il modello è da scartare. Le inversioni degli integrali precedenti sono in genere numericamente *mal condizionate* e richiedono tecniche numeriche non banali.

5) Per finire, anche se il modello ammette una  $f > 0$  non è detto che sia *stabile*. Occorrono tecniche apposite per studiare la stabilità.

## 2.2 Dalla teoria al modello

La “filosofia” di questo approccio è completamente diversa dalla precedente. In questo caso si costruisce una  $f(E, L^2, L_z, \dots)$  in funzione del tipo di modello che si cerca. La  $f$  viene scelta usando argomenti fisici di base, quindi eventuali modelli ottenuti hanno il vantaggio di essere ben motivati. Inoltre,  $f \geq 0$  per scelta, e quindi non si pongono problemi di verifica. Si risolve poi (in genere, numericamente) l’equazione che impone l’*autoconsistenza*,

$$\Delta\psi = -4\pi G \int_{\mathbb{R}^3} f d^3\mathbf{v},$$

determinando i parametri che compaiono nella  $f$ . Si ottengono poi tutte le informazioni che interessano.

**Esempio 1** Simmetria sferica,  $f = f(\epsilon)$ :

$$\rho(r) = 4\pi \int_0^{\psi} f(\epsilon) \sqrt{2(\psi - \epsilon)} d\epsilon.$$

**Esempio 2** Simmetria sferica,  $f = f(\epsilon, L^2)$ :

$$\rho = \frac{2\pi}{r^2} \int_0^{\psi} d\epsilon \int_0^{r\sqrt{2(\psi-\epsilon)}} \sqrt{2\left(\epsilon - \psi + \frac{L^2}{2r^2}\right)} L dL.$$

**Esempio 3** Simmetria assiale,  $f = f(\epsilon, L_z)$ : Già mostrato nell’esempio 2 di pagina precedente.

Ecco alcuni esempi.

- POLITROPICHE

$$f(\epsilon) = C \times \begin{cases} \epsilon^{n-3/2} & \text{per } (\epsilon > 0) \\ 0 & \text{per } (\epsilon \leq 0) \end{cases}$$

Si ottiene  $\rho = c_n \psi^n$  da cui si arriva, attraverso l’equazione di Poisson, all’equazione di Lane-Emden:

$$\frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} \left( s^2 \frac{d\Psi}{ds} \right) = -\Psi^n.$$

Le condizioni al contorno naturali sono:  $\Psi(0) = 1$ ,  $(d\Psi/ds)_{s=0} = 0$ . Per  $n = 5$

$$\Psi \propto \frac{1}{\sqrt{1 + s^2/3}},$$

che conduce a

$$\rho \propto \frac{1}{(1 + s^2/3)^{5/2}},$$

cioè al modello di Plummer.

- SFERA ISOTERMA

$$f(\epsilon) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \rho^{\epsilon/\sigma^2}.$$

Si mostra che  $\overline{v^2}(r) = 3\sigma^2$  per ogni  $r$ , da cui il nome di *isoterma*. Una soluzione è la sfera isoterma singolare

$$\rho(r) \propto 1/r^2.$$

Imponendo invece una condizione di regolarità nell'origine,

$$\left( \frac{d\psi}{dr} \right)_{r=0} = 0,$$

si ottiene la sfera isoterma non singolare. In questo caso non c'è espressione analitica esplicita per la  $\rho$ , però, definendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho} \equiv \rho(r)/\rho(0) \\ r_0 = \sqrt{9\sigma^2/4\pi G\rho(0)} \\ \tilde{r} = r/r_0, \end{array} \right\}$$

si prova che

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\rho} \sim 1/\tilde{r}^2 & \text{per } \tilde{r} \gg 1 \\ \tilde{\rho} \cong (1 + \tilde{r}^2)^{-3/2} & \text{per } \tilde{r} \leq 2. \end{array} \right\}$$

Sfortunatamente la massa della sfera isoterma diverge al tendere di  $r$  all'infinito.

- KING<sub>2</sub> (1969)

$$f_K(\epsilon) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} (\rho^{\epsilon/\sigma^2} - 1).$$

In questa maniera si considerano perdute tutte le particelle con una  $\epsilon > \psi_t$ . Anche qui la  $\rho$  non è analitica, ma la sua proiezione è ben descritta dalla King<sub>1</sub> (1966). La  $f_K$  fornisce quindi una base teorica accettabile per la descrizione degli ammassi globulari.

- $f_\infty$  (BERTIN-STIAVELLI)

$$f_\infty(\epsilon, L^2) = \frac{A}{\epsilon^{3/2}} \rho^{a\epsilon - cL^2/2}.$$

E' costruita sulla base di argomenti statistici. Riproduce molto bene in proiezione la de Vaucouleurs.

### 3 Bibliografia

DINAMICA STELLARE

- 1) Binney, J. , Tremaine, S. , *Galactic Dynamics*, Princeton University Press.
- 2) Saslaw, W. C., *Gravitational Physics of Stellar and Galactic Systems*, Cambridge University Press.
- 3) Spitzer, L., *Dynamical Evolution of Globular Clusters*, Princeton University Press.
- 4) Bertin, G., Lin, C. C. *Spiral Structure in Galaxies: a Density Wave Theory*, MIT University Press.
- 5) Boccaletti, D. , Pucacco, G., *Theory of Orbits*, Springer Verlag.

- 6) Szebehely, V., *Theory of Orbits*, Academic Press.
- 7) Meyer, K. R., Hall, G. R., *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body Problem*, Springer Verlag.

TEORIA DEL POTENZIALE

- 1) Kellogg, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Dover.
- 2) Chandrasekhar, S., *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, Dover.
- 3) Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons.

MECCANICA ANALITICA

- 1) Arnold, V. *Metodi matematici della meccanica classica*, MIR.
- 2) Arnold, V. *Equazioni differenziali ordinarie*, MIR.
- 3) Arnold, V. *Metodi geometrici della teoria delle ODE*, MIR.
- 4) Landau, L. D., Lifšits, E. M., *Meccanica*, Editori Riuniti.
- 5) Gallavotti, G. *Meccanica Elementare*, Boringhieri.
- 6) Fasano, A., Marri, S. *Meccanica analitica*, Boringhieri.
- 7) Whittaker, E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press.
- 8) Khinchin, A. I., *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*, Dover.

ARTICOLI DI REVIEW

- 1) Binney, J., "Dynamics of Elliptical Galaxies and Other Spheroidal Components" *ARAA*, 1982, **20**, 399.
- 2) de Zeeuw, T, Franx, M., "Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies" *ARAA*, 1991, **29**, 239.
- 3) Bertin, G., Stiavelli, M., "Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies" *Rep. Progr. Phys.* 1993, **56**, 493.